~~Fonction~~ dont la différentielle en tout point est une isométrie | Leçons : 204, 214, 215

Thm : Soit $(E, \langle \cdot,\cdot \rangle)$ un espace euclidien. $f : E \to E$ $\mathcal{C}^1$ tq
$\forall x \in E$, df_x est une isométrie de E (càd $\|df_x(h)\| = \|h\|$)
Alors f est une isométrie affine. $E = \mathbb{R}^n$

Preuve :

- On norme $\mathcal{L}(E)$ avec la norme $|||u||| = \sup\limits_{\|x\|=1} \|u(x)\|$, $\forall u \in \mathcal{L}(E)$

  Donc on a $|||df_x||| = 1$ et par inégalités des accroissements finis on a
  $\forall (x,y) \in E^2$, ~~$|||f$~~ $\|f(x) - f(y)\| \leq$ ~~$|||d$~~ $\|x - y\|$

- Soit $a \in E$, df_a est une isométrie elle est donc inversible, donc par théorème d'inversion locale, il existe un voisinage de a ouvert V_a tel que $f_{|V_a}$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de V_a sur $W_a = f(V_a)$.

  Soit $g : W_a \to V_a$ le difféomorphisme inverse, quitte à considérer $B \subset W_a$ une boule ouverte contenant a et à remplacer V_a par $g(B)$ on peut supposer que W_a est une boule ouverte. (Donc convexe)
  Ainsi par inégalité des accroissements finis appliquée à g on a

  $$\forall (x,y) \in V_a^2, \|x - y\| = \|g(f(x)) - g(f(y))\| \leq \underbrace{\sup_{z \in [f(x), f(y)]} |||dg_z|||}_{=1} \cdot \|f(x) - f(y)\|$$

  et comme $dg_z = (df_{g(z)})^{-1} \in O(E)$ $\Longrightarrow$

  D'où $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$, $\forall (x,y) \in V_a^2$

- De manière équivalente, pour tout $x, y \in V_a$ on a

  $$\langle f(x) - f(y), f(x) - f(y) \rangle = \langle x - y, x - y \rangle$$

  on différentie cette expression par rapport à x et on évalue en h on a ainsi

  $$\langle df_x(h), f(x) - f(y) \rangle + \langle f(x) - f(y), df_x(h) \rangle = \langle h, x - y \rangle + \langle x - y, h \rangle$$

  D'où $\langle df_x(h), f(x) - f(y) \rangle = \langle h, x - y \rangle$

On différentie par rapport à y et on évalue en l donc on a

$$\langle df_x(h), df_y(l)\rangle = \langle h, l\rangle, \forall (x,y)\in V_a^2, \forall (h,l)\in E^2$$

On déduit de ce résultat que pour $x,y\in V_a$ et $h\in E$ on a

$$\|df_x(h)-df_y(h)\| = \|df_x(h)\|^2 - 2\langle df_x(h), df_y(h)\rangle + \|df_y(h)\|^2$$
$$= \|h\|^2 - 2\langle h,h\rangle + \|h\|^2 = 0$$

Donc $df_x(h)=df_y(h)$ et ce, $\forall h\in E$ ie : $df_x = df_y$

Donc la différentielle de f est constante sur V_a

- Soit alors $\Gamma = \{x\in E, df_x = df_0\}$

D'après ce qui précède, pour tout $a\in\Gamma$, il existe $V_a\subset E$ tel que $\forall (x,y)\in V_a^2$ $df_x = df_y$, mais $a\in V_a$ donc $\forall x\in V_a$, $df_x = df_a = df_0$. Ainsi $V_a\subset\Gamma$ donc Γ est ouvert.

Par ailleurs $\Gamma = (df)^{-1}(\{df_0\})$ est fermé car f est $\mathcal{C}^1$ et l'image d'un fermé par une application continue est fermé donc Γ est ouvert et fermé.

Or E est connexe (car convexe) on a donc que $\Gamma = E$.

On pose $u = df_0 \in O(E)$ on a donc $df_x = u$, $\forall x\in E$.

Ainsi, la fonction $f-u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de différentielle nulle sur E donc c'est une fonction constante, si on note $\alpha\in E$ sa valeur on a donc

$f(x) = u(x)+\alpha$, $\forall x\in E$, comme $u = df_0$ est une isométrie, f est une isométrie affine

$\square$

Analyse, Gourdon

COMPLÉMENT

- Savoir démontrer que boule ouvert => convexe (Ok)
- Savoir démontrer que différentielle nulle => $f \circ$ cst (lignes brisées + accroissements finis sur chaque segment)

- Et si on change de norme sur $\mathbb{R}^n$?

- Idée de preuve du TIL : pour $\varepsilon > 0$, $F_y(x) = x + y - f(x)$
  on mq $\exists ! \, r > 0$ tq $F_y(\overline{B(0,r)}) \subset B(0,r)$
  D'où pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$ on a F_y contractante par TAF
  D'où Thm de point fixe, on a $y = f(x)$